目录

哦天哪，怎么会有人，5.20，还在这里 read the readings? 达芬奇兮云飞扬……

上一章确实比较抽象，或者说，高屋建瓴。(其实上一章感觉接触的也都是有限维的向量空间)

现在终于要继续深入它们的结构。

目录

2A 1

2A

其实这些概念已经挺熟悉了。

在读到 2.9 的定义前，我思考的东西正好撞上了这个定义：一个向量空间总可以被其内部的一组向量张成。当然我的思考并不如书上完备，无限维的向量空间似乎不能被有限大小的向量组张成。

$\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$。这里只是浅浅提了一下多项式空间，重点还是在定义有限维和无限维的向量空间上，稍微有些弯弯绕，但逻辑并无冗余。

线性无关和之前定义的直和 $\oplus$ 有些相似，结论也相似：如果 0 能以多种方式被表述，那么其它向量就一定可以以多种方式被表述，反之亦然。

2.16(c) 挺有意思，因为 $3 \cdot 0 = 998244353 \cdot 0 = 0$，这也意味着一个线性无关组内不应有 0

2.22 的构造过程非常重要，关键点是：(1)每次加入线性无关组后必然变成线性相关组 (2)每次去除元素后仍然张成空间，(1)使得(2)成立，(2)也使得(1)成立，这种构造过程等价于线性空间的某种结构。

像 2.25 这样的构造过程也是非常好的，我一直想学习这种通过构造过程揭示结构的方式。

做题做题。

习题 1，(0,1,-1)，(1,-1,0)，(1,0,-1)，(0,0,0)，实际上三个（两个）就够了，对于任意 (x, y, z)，可以通过加上 $z(0, 1, -1)$ 转化为 $(x, y+z, 0)$，而这显然是一个 $x = -(y+z)$ 的东西。

习题 2，组合组合还是 v_1, v_2, v_3, v_4 这个组，也没有引入新的东西

习题 3，首先后者不小于前者，其次后者能张出的前者也能张出。

习题 4，正文好像讲过

习题 5，t=2

习题 6，这种当且仅当直接列方程组就行了，$\begin{cases} 2x+y+7z=0 \\ 3x-y+3z=0 \\ x+2y+cz=0 \end{cases}$，$\begin{cases} 7x+(6+c)z=0 \\ 5x+10z=0 \end{cases}$，$5(6+c)z - 70z = 0$，由于 $z = 0$ 可以推出 $x = y = 0$，所以 $z \neq 0$，因此推出 $c = 8$

习题 7，$\mathbb{R}$ 上的，意思就是标量乘法只能用 $\lambda \in \mathbb{R}$，用方程组 $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases}$ 可以看到确实线性无关。而在 $\mathbb{C}$ 上的话就不能这么列方程组了，应该列成 $a(1+i) + b(1-i) = 0$，假设 $a = 0$ 可以得到 $b = -\frac{1+i}{1-i} = -\frac{(1+i)^2}{2}$，

习题 8，同习题 2

习题 9，$v_2, \dots, v_m$ 线性无关，假如题目中的线性相关就意味着 $v_1 = \frac{(4+a)v_2 + bv_3 + \dots}{5}$，与题目假设冲突。

习题 10，同习题 9

习题 11，$v_k + w_k = (a_1 v_1 + \dots + a_m v_m) + (a_1 w_1 + \dots + a_m w_m)$，似乎并不能得出矛盾，故方向转为寻找反例。实际上有个显然的反例，那就是 $w_k = -v_k$

习题 12，$v_k + w = (a_1 v_1 + \dots + a_m v_m) + (a_1 + \dots + a_m)w$，也就是 $w = -\frac{a_1 v_1 + \dots + (a_k - 1)v_k + \dots + a_m v_m}{a_1 + \dots + a_m - 1}$

习题 13，$v_1, \dots, v_m, w$ 线性相关 $\leftrightarrows w \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_m)$，反之亦然

习题 14，正方向显然，而要从 W 线性无关推出 V 线性无关，由于 v_k 可以表示为 $w_k - w_{k-1}$ 的形式（特别地，$v_1 = w_1$），所以若 V 线性相关，那么表达式必然可以通过变形得到 W 线性相关的结果。

习题 15，由于无关组 $\leqslant$ 张成组，而 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 只需要 $1, z, z^2, z^3, z^4$ 五个向量就可以张成，故得证。

习题 16，同习题 15

习题 17，假如推广一下无关组 $\leqslant$ 张成组证明就很简单了……可惜不能，不过看上去挺对的，那么就顺着这个思路走。

不存在长度大于等于 k 的线性无关组，相当于所有 $\geqslant k$ 的组都线性相关，而线性相关的组一定可以被更小的组张成，进而被无关组张成，这也意味着空间本身可以被一个 $< k$ 的无关组张成，所以空间不是无限维的。

空间维度有限，就适用于无关组 $\leqslant$ 张成组了，这个方向显然。

习题 18，跟正文中对多项式的证明一样。

习题 19，多项式空间就是无线维了，所有实值函数那更是。

习题 20，其实无关组 $\leqslant$ 张成组就行了。当然，也要尝试其他方向。

嗯，逼着我回想起了多项式零点意味着什么。$p_k(2) = 0$ 意味着 $p_k(z) = (z-2)(z - a_{k,1})(z - a_{k,2})\cdots(z - a_{k,m-1})$，不过这好像没啥用？